

Série 2

- Solution 1.** a) $E \cap F^c \cap G^c$;
 b) $E \cup F \cup G$, ou encore $(E^c \cap F^c \cap G^c)^c$;
 c) $(E \cap F \cap G)^c$;
 d) $(E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G) \cup (E^c \cap F \cap G)$.

Solution 2. Clairement,

- $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$;
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A^c \cup B)^c \cup (A \cup B^c)^c$.

Comme la tribu $\mathcal{F}$ est fermée sous les opérations unions dénombrables et compléments, chacun de ces ensembles fait partie de $\mathcal{F}$.

Solution 3. $A_\infty = \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathcal{N}^*, \forall k \geq n, \omega \in A_k\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k$. Il s'agit en fait de l'ensemble des réalisations de l'espace fondamental Ω qui appartiennent à une infinité de A_k . On parle de *limite supérieure* des A_k et on note $\limsup_n A_n$.

Solution 4. a) $\Omega = \mathcal{N}$.

- b) $P(A_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^k \frac{1}{6}$ et $\sum_{k \geq 0} P(A_k) = \frac{1}{6} \frac{1}{1-5/6} = 1$.
- c) i) $E_p = \bigcup_{k \geq 0} A_{2k}$ et $P(E_p) = \frac{1}{6} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{6}{11}$;
 ii) $P(E_i) = \frac{1}{6} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k+1} = \frac{5}{11}$.

Solution 5. On a,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \Pr \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c \right\} \\
 &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(\bigcup_{j=1}^n A_j^c \right) \\
 &\stackrel{(*)}{=} 1 - \Pr \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \right) \\
 &= 1 - \Pr \left\{ \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c \right\} \\
 &= \Pr \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right).
 \end{aligned}$$

En utilisant **Note on theorem 8**, (e) du cours.

Solution 6. Si la réponse est 1/4 alors, comme 2 choix de réponses sur 4 sont '1/4', la réponse doit en fait être 1/2. C'est une contradiction. Donc la réponse ne peut pas être 1/4.

Si la réponse est 1/2 (ou 1) alors, comme '1/2' (ou '1') correspond à 1 choix de solution sur 4, la réponse doit être 1/4. C'est encore une contradiction. Donc la réponse ne peut pas être 1/2 (ni 1).

Ainsi, aucun des réponses proposées n'est correct. Donc la probabilité de choisir la réponse correcte est 0.